

PROGRAMMATION LINÉAIRE COLORÉE, ÉQUILIBRE DE NASH ET PIVOTS

PAULINE SARRABEZOLLES ET FRÉDÉRIC MEUNIER

*Université Paris Est, CERMICS (ENPC), 6-8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, F-77455
Marne-la-Vallée*

1. INTRODUCTION

Etant donnés k ensembles de points $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k$ dans $\mathbb{R}^d$, un sous-ensemble $T \subseteq \bigcup_{i=1}^k \mathbf{S}_i$ est appelé *simplexe arc-en-ciel* s'il intersecte chaque $\mathbf{S}_i$ au plus une fois. Le problème de la *programmation linéaire colorée*, défini par Bárány et Onn [3], est alors le suivant.

PROGRAMMATION LINÉAIRE COLORÉE

Donnée. Une configuration de k ensembles de points dans $\mathbb{Q}^d$.

Tâche. Décider s'il existe un simplexe arc-en-ciel T tel que $\mathbf{0} \in \text{conv}(T)$.

On retrouve la programmation linéaire usuelle comme le cas particulier de la programmation linéaire colorée où les $\mathbf{S}_i$ sont $d + 1$ copies d'un même ensemble : $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 = \dots = \mathbf{S}_{d+1}$.

L'objet de ce travail est de donner une réponse à une question posée par Bárány et Onn dans [3] concernant la complexité du cas particulier de PROGRAMMATION LINÉAIRE COLORÉE où $k = d + 1$. Nous répondons également à une autre question de complexité, posée par Meunier et Deza [8], en faisant le lien entre la programmation linéaire colorée et le problème du calcul des équilibres de Nash dans les jeux bimatriciels. Enfin nous proposons une adaptation de l'algorithme de Bárány et Onn calculant une solution pour un cas particulier de la programmation linéaire. Cette adaptation peut être interprétée comme une "Phase I" de la méthode du simplexe.

2. COMPLEXITÉ DU CAS $k = d + 1$

Dans leur article [3], Bárány et Onn prouvent que le problème de la programmation linéaire colorée est NP-complet (Théorème 5.1 de leur article). Ils utilisent pour cela une réduction du problème de partition au cas de la programmation linéaire colorée où $k = d$. En commentaire de leur théorème, ils posent la question de la complexité du cas $k = d + 1$. Cette question est motivée par un résultat antérieur de Bárány, le théorème de Carathéodory coloré, qui dit la chose suivante : *Si $k = d + 1$ et $\mathbf{0} \in \text{conv}(\mathbf{S}_i)$ pour $i = 1 \dots, d + 1$, alors il existe un simplexe arc-en-ciel contenant $\mathbf{0}$ dans son enveloppe convexe.* D'après ce théorème, si $k = d + 1$ et si chaque $\mathbf{S}_i$ contient $\mathbf{0}$ dans son enveloppe convexe, alors la réponse à PROGRAMMATION LINÉAIRE COLORÉE est systématiquement 'oui'. Ne plus exiger que les $\mathbf{S}_i$ contiennent $\mathbf{0}$ dans

E-mail address: pauline.sarrabezolles@enpc.fr, frederic.meunier@enpc.fr.

leur enveloppe convexe, mais maintenir la condition $k = d + 1$, permet d'obtenir un véritable problème de décision en relâchant légèrement la condition du théorème de Carathéodory coloré. Le théorème suivant répond à leur question.

Théorème 1. PROGRAMMATION LINÉAIRE COLORÉE avec k ensembles de points $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k$ dans $\mathbb{Q}^d$ est NP-complet quand $k = d + 1$, même si chaque $\mathbf{S}_i$ est de taille au plus 2.

Il existe des conditions, vérifiables en temps polynomial, pour lesquelles l'existence d'un simplexe arc-en-ciel contenant $\mathbf{0}$ dans son enveloppe convexe est assurée : la condition du théorème de Carathéodory coloré est l'une d'entre elles. D'autres conditions, plus générales, ont été proposées pour le cas $k = d + 1$, [1, 5, 8]. Cependant le théorème 1 montre qu'il ne peut pas exister de conditions nécessaires et suffisantes, vérifiables en temps polynomial, pour lesquelles la réponse à PROGRAMMATION LINÉAIRE COLORÉE est 'oui', à moins que $P=NP$.

3. JEUX BIMATRICIELS ET LE PROBLÈME UN AUTRE SIMPLEXE ARC-EN-CIEL

Au cours de notre étude de la complexité des problèmes liés à la programmation linéaire colorée, nous avons établi un lien entre la programmation linéaire colorée et les équilibres de Nash dans les jeux bimatriels.

Le problème de la programmation linéaire colorée est largement inspiré par le théorème de Carathéodory coloré. Meunier et Deza ont proposé un nouveau problème très similaire à PROGRAMMATION LINÉAIRE COLORÉE [8], lui aussi inspiré d'un théorème d'existence. Ce théorème est le Lemme de l'Octaèdre [2, 4], qui dit que si chaque $\mathbf{S}_i$ de la configuration est de taille 2, alors, sous condition de généricité, le nombre de simplexes arc-en-ciel contenant $\mathbf{0}$ dans leur enveloppe convexe est pair. Le problème que nous appelons UN AUTRE SIMPLEXE ARC-EN-CIEL est le suivant.

UN AUTRE SIMPLEXE ARC-EN-CIEL

Données. Une configuration de $d + 1$ paires de points $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_{d+1}$ dans $\mathbb{Q}^d$ et un simplexe arc-en-ciel contenant $\mathbf{0}$ dans son enveloppe convexe.

Tâche. Trouver un autre simplexe arc-en-ciel contenant $\mathbf{0}$ dans son enveloppe convexe.

Quitte à perturber la position des points, l'existence d'un autre simplexe est assurée par le Lemme de l'Octaèdre. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait un seul simplexe arc-en-ciel, ce qui contredirait la parité. Dans leur article Meunier et Deza s'interrogent sur la complexité de ce problème. Nous répondons à leur question en montrant que ce problème généralise celui de calculer un équilibre de Nash dans un jeu bimatriel. Ce dernier – appelé BIMATRIX – est reconnu comme étant un problème 'difficile' au sens de la complexité algorithmique. La classe de complexité correspondant à ces deux problèmes est la classe PPAD, définie par Papadimitriou [9].

Théorème 2. UN AUTRE SIMPLEXE ARC-EN-CIEL est PPAD-complet.

La réduction du problème BIMATRIX à UN AUTRE SIMPLEXE ARC-EN-CIEL s'appuie sur une formulation de BIMATRIX comme un problème de complémentarité linéaire, [7]. L'appartenance de UN AUTRE SIMPLEXE ARC-EN-CIEL à la classe PPAD se montre aisément par la méthode des primoïdes et des duoïdes décrite par Todd [10]. On obtient une autre preuve de ce résultat, inspirée d'un papier de Kalai et Meshulam [6], en utilisant le lemme de Sperner.

Nous montrons enfin qu'un algorithme pour PROGRAMMATION LINÉAIRE COLORÉE donnerait directement un algorithme résolvant UN AUTRE SIMPLEXE ARC-EN-CIEL et a fortiori BIMATRIX. La construction d'un tel algorithme nous donne un exemple concret du fait que les problèmes NP-complets sont plus durs que les problèmes PPAD.

Supposons connu un algorithme $\mathcal{A}$ résolvant PROGRAMMATION LINÉAIRE COLORÉE et considérons une instance de UN AUTRE SIMPLEXE ARC-EN-CIEL, c'est à dire la donnée de $d + 1$ paires de points $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_{d+1}$ et d'un simplexe arc-en-ciel T contenant $\mathbf{0}$ dans son enveloppe convexe. L'algorithme choisit successivement un point dans chaque $\mathbf{S}_i$. A chaque itération, l'algorithme teste les points de $\mathbf{S}_i$ avec l'aide de $\mathcal{A}$ et en choisit un qui est dans un simplexe arc-en-ciel formé en partie avec les points déjà sélectionnés et contenant $\mathbf{0}$ dans son enveloppe convexe, la priorité étant donnée au point de $\mathbf{S}_i \setminus T$. Une itération typique de l'algorithme s'écrit :

Définir $\mathbf{S}'_i := \mathbf{S}_i \setminus T$; appliquer $\mathcal{A}$ à $\mathbf{S}'_1, \dots, \mathbf{S}'_i, \mathbf{S}_{i+1}, \dots, \mathbf{S}_{d+1}$; si la réponse est 'non', définir à la place $\mathbf{S}'_i := \mathbf{S}_i \cap T$.

A la fin l'algorithme renvoie $\bigcup_{i=1}^{d+1} \mathbf{S}'_i$. Puisque nous savons qu'il existe un autre simplexe arc-en-ciel, la réponse sera 'oui' pour au moins l'une des itérations. Le simplexe arc-en-ciel retourné par l'algorithme contient donc $\mathbf{0}$ dans son enveloppe convexe et est différent de T .

4. ALGORITHMES DE BÁRÁNY ET ONN ET MÉTHODE DU SIMPLEXE

Rappelons que le théorème de Carathéodory coloré assure que si $k = d + 1$ et chaque $\mathbf{S}_i$ contient $\mathbf{0}$ dans son enveloppe convexe, alors il existe un simplexe arc-en-ciel contenant $\mathbf{0}$ dans son enveloppe convexe. L'algorithme proposé par Bárány et Onn pour trouver un tel simplexe sous ces conditions procède de la façon suivante. Il considère un simplexe arc-en-ciel ; tant que ce simplexe ne contient pas $\mathbf{0}$ dans son enveloppe convexe, il choisit la face¹ du simplexe la plus proche de $\mathbf{0}$; il remplace le sommet du simplexe n'appartenant pas à cette face par un autre sommet de la même couleur, tel que le nouveau simplexe formé de la face et de ce point est strictement plus proche de $\mathbf{0}$. Cet algorithme utilise le calcul soit d'une distance soit d'une projection pour déterminer la face la plus proche et le sommet entrant.

Nous proposons ici un algorithme qui évite ce genre d'opérations. Notre méthode rappelle la "Phase I" de la méthode du simplexe, qui utilise un programme auxiliaire pour trouver une première base réalisable.

On se place dans le cas où les points sont en position générique et chaque $\mathbf{S}_i$ est de taille $d + 1$. L'idée est d'introduire un point fictif v et de définir le problème d'optimisation auxiliaire suivant.

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{s.c.} \quad & A\lambda + z\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \lambda \geq \mathbf{0}, z \geq 0, \end{aligned}$$

1. *facet* selon la terminologie anglaise

où $\bar{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}, 1)$ et A est la matrice $(d+1) \times (d+1)^2$ dont les colonnes correspondent aux points de $\mathbf{S}_i$ avec un 1 sur la dernière ligne. Noter que toute solution pour la programmation linéaire colorée fournit une base optimale de ce problème dont la valeur est 0.

Notre algorithme procède de la façon suivante. Il choisit arbitrairement un premier *transversal*, c'est-à-dire un sous-ensemble $F_1 \subseteq \bigcup_i \mathbf{S}_i$, et place le point fictif $\mathbf{v}$ de telle sorte que $\mathbf{0} \in \text{conv}(F_1 \cup \{\mathbf{v}\})$. L'ensemble $F_1 \cup \{\mathbf{v}\}$ correspond à une base réalisable du problème d'optimisation ci-dessus. Il effectue ensuite des pivots du simplexe, allant de base réalisable en base réalisable jusqu'à obtenir une base optimale arc-en-ciel. Une itération de l'algorithme sélectionne une variable entrante de coût réduit négatif et de couleur non présente dans le transversal courant. Un élément de la base courante devient alors 'hors-base'. S'il s'agit de $\mathbf{v}$, on a alors atteint une base optimale arc-en-ciel. Sinon on a défini un nouveau transversal F_{i+1} tel que $\mathbf{0} \in \text{conv}(F_{i+1} \cup \{\mathbf{v}\})$.

Le fait de choisir systématiquement un point de coût réduit négatif assure que l'algorithme ne boucle pas. De plus, les conditions du théorème de Carathéodory coloré assure que tant qu'une solution n'a pas été trouvée, il existe des points de coûts réduits négatifs. On montre en effet qu'à la i ème itération, les points de coût réduit négatif sont exactement les points du demi-espace délimité par $\text{aff}(F_i)$ et contenant $\mathbf{0}$. L'argument est alors le même que celui de l'algorithme de Bárány et Onn.

RÉFÉRENCES

1. Jorge L. Arocha, Imre Bárány, Javier Bracho, Ruy Fabila, and Luis Montejano, *Very colorful theorems*, Discrete and Computational Geometry **42** (2009), 142–154.
2. Imre Bárány and Jiří Matoušek, *Quadratically many colorful simplices*, SIAM Journal on Discrete Mathematics **21** (2007), 191–198.
3. Imre Bárány and Shmuel Onn, *Colourful linear programming and its relatives*, Mathematics of Operations Research **22** (1997), 550–567.
4. Antoine Deza, Sui Huang, Tamon Stephen, and Tamás Terlaky, *The colourful feasibility problem*, Discrete Applied Mathematics **156** (2008), 2166–2177.
5. Andreas F. Holmsen, János Pach, and Helge Tverberg, *Points surrounding the origin*, Combinatorica **28** (2008), 633–644.
6. Gil Kalai and Roy Meshulam, *A topological colorful Helly theorem*, Advances in Mathematics **191** (2005), 305–311.
7. Carlton E. Lemke and Joseph T. Howson, Jr, *Equilibrium points of bimatrix games*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics **12** (1964), 413–423.
8. Frédéric Meunier and Antoine Deza, *A further generalization of the colourful Carathéodory theorem*, Discrete Geometry and Optimization, Fields Institute Communications **69** (2013).
9. Christos H. Papadimitriou, *On the complexity of the parity argument and other inefficient proofs of existence*, Journal of Computer and System Sciences **48** (1994), 498–532.
10. Michael J. Todd, *Orientations in complementary pivot algorithms*, Mathematics of Operations Research **1** (1976), 54–66.